Ejercicio del capítulo 3 (Retículos y Álgebras de Boole)

Ejercicio 1. Si los símbolos de una baraja de cartas de póker ♣, ♦, ♥ y ♠ representan alguna de las puertas lógicas conocidas, consideremos la siguiente función booleana:

$$f(x,y,z,t) = (x \clubsuit (y \diamondsuit t)) \heartsuit ((x \spadesuit \bar{z}))$$

Calcular su tabla de verdad, formas canónicas y polinomio de Gegalkine, sabiendo:

a) ♣ es: el biconditional si tu primer apellido empieza por vocal, en otro caso es la puerta lógica disyunción exclusiva.
b) ♥ es: la suma si los dígitos de tu DNI suman un número par, y la puerta lógica condicional si suman un número impar.
c) ♦ es: Nand si naciste en un día par y la puerta lógica Nor si naciste en uno impar.
d) Por último, ♠ es el bicondicional si tu DNI termina en 0, 1 o 2, la disyunción exclusiva si termina en 5, 6 o 7 y el producto en otro caso.

$$f(x,y,z,t) = (x \leftrightarrow (y \uparrow t)) \vee ((x \oplus \bar{z})).$$

Tabla de verdad

x	y	z	t	$y \uparrow t$	$\bar{z}$	$x \oplus \bar{z}$	$x \leftrightarrow (y \uparrow t)$	$f(x,y,z,t)$	
0	0	0	0	1	1	1	0	1	$m(0,0,0,0)$
0	0	0	1	1	1	1	0	1	$m(0,0,0,1)$
0	0	1	0	1	0	0	0	$\boxed{0}$	$M(0,0,1,0)$
0	0	1	1	1	0	0	0	$\boxed{0}$	$M(0,0,1,1)$
0	1	0	0	1	1	1	0	1	$m(0,1,0,0)$
0	1	0	1	0	1	1	1	1	$m(0,1,0,1)$
0	1	1	0	1	0	0	0	$\boxed{0}$	$M(0,1,1,0)$
0	1	1	1	0	0	0	1	1	$m(0,1,1,1)$
1	0	0	0	1	1	0	1	1	$m(1,0,0,0)$
1	0	0	1	1	1	0	1	1	$m(1,0,0,1)$
1	0	1	0	1	0	1	1	1	$m(1,0,1,0)$
1	0	1	1	1	0	1	1	1	$m(1,0,1,1)$
1	1	0	0	1	1	0	0	$\boxed{0}$	$M(1,1,0,0)$
1	1	0	1	0	1	0	0	$\boxed{0}$	$M(1,1,0,1)$
1	1	1	0	1	0	1	1	1	$m(1,1,1,0)$
1	1	1	1	0	0	1	1	1	$m(1,1,1,1)$

$$f = M_{(0,0,1,0)} \wedge M_{(0,0,1,1)} \wedge M_{(0,1,1,0)} \wedge M_{(1,1,0,0)} \wedge M_{(1,1,0,1)}$$

$$f = m_{(0,0,0,0)} \vee m_{(0,0,0,1)} \vee m_{(0,1,0,0)} \vee m_{(0,1,0,1)} \vee m_{(0,1,1,1)} \vee$$
$$\vee\ m_{(1,0,0,0)} \vee m_{(1,0,0,1)} \vee m_{(1,0,1,0)} \vee m_{(1,0,1,1)} \vee m_{(1,1,1,0)} \vee$$
$$\vee\ m_{(1,1,1,1)}.$$

$$f(x,y,z,t) = (x \vee y \vee \bar{z} \vee t) \wedge (x \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{t}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t) \vee$$
$$\vee (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee t) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{t}).$$

$$f(x,y,z,t) = (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge \bar{t}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge t) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \wedge \bar{t}) \vee$$
$$\vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \wedge t) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z \wedge t) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge \bar{t}) \vee$$
$$\vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge t) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z \wedge \bar{t}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z \wedge t) \vee$$
$$\vee (x \wedge y \wedge z \wedge \bar{t}) \vee (x \wedge y \wedge z \wedge t).$$

Polinomio de Gegalkine

$$f(x,y,z,t) = \big((x \leftrightarrow (y \uparrow t)) \vee (x \oplus \bar{z})\big)$$

$\{1, \oplus, \wedge\}$ $\qquad \bar{x} = x \oplus 1.$

$$f(x,y,z,t) = \overline{x \oplus \overline{(y \wedge t)}} \quad \vee \quad (x \oplus \bar{z})$$
$$= \overline{x \oplus \overline{(y \wedge t)} \quad \wedge \quad \overline{(x \oplus \bar{z})}}$$
$$= \Big(\big[x \oplus [(y \wedge t) \oplus 1]\big] \wedge \big[(x \oplus (z \oplus 1)) \oplus 1\big]\Big) \oplus 1.$$